Université des lagunes **République de Côte d'Ivoire**

Licence 2 : Mathématiques **Année Universitaire : 2021/2022**

TRAVAUX DIRIGÉS : SÉRIES ENTIÈRES – SÉRIES DE FOURIER

Les differents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1 *Rayon de convergence 1*

Déterminer le rayon de convergence $\mathbf{R}$ et la nature pour $x = \pm\mathbf{R}$ des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-3n} x^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\text{Log}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right) x^n$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n(2n+1)}$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n} x^n$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\sqrt{n}} x^n.$

Exercice 2 *Somme d'une série entière*

Calculer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{n!} x^n$ 4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n.$

Exercice 3 *Série entière*

On considère la série entière réelle définie par la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière ci-dessus. Puis étudier la convergence pour $x = R$ et $x = -R$.
2. Soit la série entière définie par la fonction $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence R' de la série entière g.
   (b) Calculer pour tout $x \in]-R', R'[$, l'expression de $g(x)$.
3. (a) Soit $x \in]-R, R[$. Montrer que $f'(x) = -g(x^2)$.
   (b) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 4 *Série de Fourier 1*

Soit f la fonction 2π-périodique définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = x^2.$

1. Étudier la parité de f. Tracer f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f. Déterminer la série de Fourier $s(f)$ de f et étudier sa convergence.
3. En déduire la valeur des sommes suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $S_3 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$

Exercice 5 *Série de Fourier 2*

Soit la fonction impaire, 2π-périodique, définie par

$$f(x) = \pi(x-\pi), \qquad \text{pour tout } x \in [0,\pi]$$

1. Représenter le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f. Déterminer la série de Fourier $s(f)$ de f et étudier sa convergence.
3. En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \; ; \; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \; ; \; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \; ;$$

Exercice 6 *Série de Fourier 3*

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi^2}{4} & \text{si } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. Que peut-on dire sur la parité et la continuité de f ?
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montrera, en particulier, que

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3} \quad ; \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2k^2}, \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k+1)^3}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

3. Justifier que la série de Fourier $s(f)$ de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = s(f)(x).$$

4. En considérant deux valeurs particulières de x, en déduire deux équations liant les sommes des séries : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$.
   Résoudre le système linéaire ainsi trouvé pour obtenir les valeurs de S_1 et S_2.

Exercice 7 *Série de Fourier 4*

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]-\pi, 0\right] \\ \sin(x) & \text{si } x \in \left]0, \pi\right] \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis écrire la série de Fourier $s(f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence de la série de Fourier $s(f)$ de f sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$